

Tema 8

Problemas

Alfonso V. Ramallo

[1] Una partícula de masa m está en el estado fundamental de un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω . En el instante de tiempo $t = 0$ se aplica sobre ella una fuerza adicional proporcional a la distancia x respecto a la posición de equilibrio del oscilador, que actúa hasta el instante de tiempo $t = T$. Dicha fuerza deriva del potencial:

$$V(t) = -\lambda x^2, \quad \text{si } 0 \leq t \leq T,$$

siendo λ una constante pequeña. Aplicando teoría de perturbaciones dependientes del tiempo a primer orden en λ , obtengáanse las probabilidades de transición desde el estado fundamental del oscilador en $t = 0$ a un estado excitado para $t > T$. ¿Para que valores de T se maximiza la probabilidad de transición?

Solución

En $t = 0$ el estado del oscilador es el estado fundamental $|0\rangle$:

$$|\psi(t = 0)\rangle = |0\rangle.$$

Calculemos la probabilidad de transición $|0\rangle \rightarrow |n\rangle$ debido a la perturbación una vez transcurrido un tiempo T . A primer orden en teoría de perturbaciones, dicha probabilidad viene dada por la ecuación:

$$P_{0 \rightarrow n} = |c_n(T)|^2,$$

donde $c_n(T)$ es la siguiente integral:

$$c_n(T) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt e^{in\omega t} \langle n|V(t)|0\rangle,$$

donde ya hemos tenido en cuenta que:

$$\omega_{n0} = \frac{E_n - E_0}{\hbar} = n\omega.$$

Puesto que:

$$V(t) = -\lambda X^2, \quad (0 < t < T),$$

la amplitud $c_n(T)$ viene dada por:

$$c_n(T) = \frac{i\lambda}{\hbar} \int_0^T dt e^{in\omega t} \langle n|X^2|0\rangle.$$

Para calcular el elemento de matriz del operador X^2 que necesitamos, recordemos que el operador posición está relacionado con los operadores de creación y aniquilación en la forma:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger).$$

Por consiguiente, tras elevar al cuadrado, podemos escribir:

$$X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + (a^\dagger)^2 + a a^\dagger + a^\dagger a).$$

Teniendo en cuenta que $a|0\rangle = 0$, obtenemos:

$$X^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [(a^\dagger)^2|0\rangle + a a^\dagger|0\rangle].$$

Por otra parte puesto que, en general, se tiene:

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

se sigue que:

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle \implies (a^\dagger)^2|0\rangle = a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle,$$

$$a a^\dagger|0\rangle = a|1\rangle,$$

y entonces:

$$X^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [\sqrt{2}|2\rangle + |0\rangle].$$

Por lo tanto, solo son distintos de cero los elementos de matriz de X^2 siguientes:

$$n = 0 \implies \langle 0|X^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

$$n = 2 \implies \langle 2|X^2|0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\omega}.$$

Solo el segundo de estos elementos de matriz induce una transición entre el estado fundamental y un estado excitado (la transición $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$). Usando el elemento de

matriz que acabamos de calcular, obtenemos la amplitud:

$$\begin{aligned} c_2(T) &= \frac{i\lambda}{\hbar} \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\omega} \int_0^T dt e^{2i\omega t} = \frac{i\lambda}{\hbar} \frac{\hbar}{\sqrt{2}m\omega} \frac{e^{2i\omega t}}{2i\omega} \Big|_0^T = \\ &= \frac{i\lambda}{\sqrt{2}m\omega} \frac{1}{2i\omega} \left(e^{2i\omega T} - 1 \right) = \frac{i\lambda}{\sqrt{2}m\omega} \frac{1}{2i\omega} e^{i\omega T} 2i \operatorname{sen}(\omega T) . \end{aligned}$$

Simplificando esta expresion obtenemos:

$$c_2(T) = i e^{i\omega T} \frac{\lambda}{\sqrt{2}m\omega^2} \operatorname{sen}(\omega T)$$

La probabilidad buscada es:

$$P_{0 \rightarrow 2} = |c_2(T)|^2 = \frac{\lambda^2}{2m^2\omega^4} \operatorname{sen}^2(\omega T)$$

Esta probabilidad se maximiza cuando $\operatorname{sen}(\omega T) = \pm 1$, que corresponde a tiempos $T = T_p$, con:

$$\omega T_p = \left(p + \frac{1}{2} \right) \pi \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

[2] Una partícula está confinada a moverse en un pozo unidimensional $0 \leq x \leq a$ de anchura a bajo la acción del potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 2V_0 \frac{x}{a}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ 2V_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right), & \text{si } \frac{a}{2} \leq x \leq a, \\ \infty, & \text{si } x < 0, x > a. \end{cases}$$

Supongase que V_0 es una constante pequeña. Utilizando teoría de perturbaciones, calculense los niveles de energía a primer orden en V_0 .

Solucion

Los autovalores de la energía y las correspondientes funciones de onda para el problema si perturbar son:

$$E_n^0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} n^2, \quad \psi_n^0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

con $n = 1, 2, \dots$. A primer orden las correcciones de los niveles de energia son:

$$\begin{aligned} E_n^1 &= \int_0^a V(x) |\psi_n^0(x)|^2 dx = \int_0^{a/2} + \int_{a/2}^a = \\ &= \frac{2}{a} 2V_0 \left[\int_0^{a/2} \frac{x}{a} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \int_{a/2}^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right]. \end{aligned}$$

Si definimos las integrales I_1 e I_2 como:

$$I_1 \equiv \int_0^{a/2} \frac{x}{a} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad I_2 \equiv \int_{a/2}^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

entonces:

$$\boxed{E_n^1 = \frac{4V_0}{a} [I_1 + I_2]}$$

Para calcular las integrales I_1 e I_2 hagamos un cambio de variable de integracion, de la variable x a la nueva variable ξ :

$$\xi = \frac{n\pi x}{a} \implies x dx = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 d\xi.$$

Entonces, I_1 viene dada por:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a} \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \xi \operatorname{sen}^2 \xi d\xi = \frac{a}{n^2 \pi^2} \left[\frac{\xi^2}{4} - \frac{1}{8} \cos(2\xi) - \frac{\xi}{4} \operatorname{sen}(2\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=\frac{n\pi}{2}} = \\ &= \frac{a}{n^2 \pi^2} \left[\frac{1}{4} \frac{n^2 \pi^2}{4} - \frac{1}{8} \cos(n\pi) - \frac{1}{4} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}(n\pi) + \frac{1}{8} \right]. \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos:

$$\boxed{I_1 = \frac{a}{16} + \frac{a}{8 n^2 \pi^2} (1 + (-1)^n)}$$

De la misma forma, I_2 toma la forma:

$$I_2 = \frac{a}{n\pi} \int_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} \left(1 - \frac{\xi}{n\pi}\right) \operatorname{sen}^2 \xi d\xi.$$

La primera de las integrales en I_2 es:

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} \operatorname{sen}^2 \xi d\xi = \left[\frac{\xi}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\xi)}{4} \right]_{\xi=\frac{n\pi}{2}}^{\xi=n\pi} = \frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{4} = \frac{n\pi}{4},$$

mientras que la segunda de ellas es:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} \xi \operatorname{sen}^2 \xi \, d\xi &= \left[\frac{\xi^2}{4} - \frac{1}{8} \cos(2\xi) - \frac{\xi}{4} \operatorname{sen}(2\xi) \right]_{\xi=\frac{n\pi}{2}}^{\xi=n\pi} = \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{4} - \frac{\cos(2n\pi)}{8} - \frac{n\pi}{4} \operatorname{sen}(2n\pi) - \frac{1}{4} \frac{n^2 \pi^2}{4} + \frac{1}{8} \cos(n\pi) + \frac{1}{4} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}(n\pi) = \\ &= \frac{3}{16} n^2 \pi^2 - \frac{1}{8} (1 - (-1)^n) . \end{aligned}$$

Sumando estos dos ultimos resultados, llegamos a:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{a}{n\pi} \left[\frac{n\pi}{4} - \frac{1}{n\pi} \left(\frac{3}{16} n^2 \pi^2 - \frac{1}{8} (1 - (-1)^n) \right) \right] = \\ &= \frac{a}{4} - \frac{3a}{16} + \frac{a}{8 n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) , \end{aligned}$$

y simplificando obtenemos:

$$\boxed{I_2 = \frac{a}{16} + \frac{a}{8 n^2 \pi^2} (1 + (-1)^n) = I_1}$$

Podemos ahora usar estos valores de I_1 e I_2 para calcular las correcciones a primer orden de los niveles de energia:

$$E_n^1 = \frac{4V_0}{a} \left[\frac{a}{8} + \frac{a}{4 n^2 \pi^2} (1 + (-1)^n) \right] .$$

Simplificando esta ecuacion, llegamos a la siguiente expresion para la correcion a primer orden E_n^1 :

$$\boxed{E_n^1 = V_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^n}{n^2 \pi^2} \right]}$$

Esta correcion depende de si el numero cuantico n es par o impar. Mas explicitamente:

$$\begin{aligned} E_n^1 &= V_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{n^2 \pi^2} \right] , & (n = 1, 3, 5, \dots) , \\ E_n^1 &= \frac{V_0}{2} , & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{aligned}$$

[3] Sea un oscilador armónico con hamiltoniano

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Este se perturba con un potencial

$$H = H_0 + V, \quad V(x) = \lambda \hbar \omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x.$$

Encuéntrese los autovalores y autovectores del hamiltoniano a primer orden no nulo en λ . Encuéntrense los autovalores y autovectores exactos.

Solucion

A orden cero en λ los autovectores y autovalores del hamiltoniano son

$$H_0 |n\rangle = E_n^{(0)} |n\rangle, \quad E_n^{(0)} = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Puesto que para el oscilador armonico:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger),$$

podemos escribir V en la forma:

$$V = \lambda \hbar \omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \implies \boxed{V = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger)}$$

Calculemos los elementos de matriz de V teniendo en cuenta que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ y $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$:

$$V|n\rangle = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} [a|n\rangle + a^\dagger|n\rangle] = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} [\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle].$$

Entonces:

$$\langle m|V|n\rangle = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} [\sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}].$$

Por consiguiente, los elementos diagonales de matriz de V se anulan:

$$\langle n|V|n\rangle = 0.$$

Se sigue entonces que las correcciones a primer orden en λ de los niveles de energia son nulas:

$$E_n^{(1)} = 0.$$

Los elementos de matriz no diagonales de V que son diferentes de cero son:

$$\langle n-1|V|n\rangle = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} \sqrt{n}, \quad \langle n+1|V|n\rangle = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} \sqrt{n+1}.$$

Por lo tanto, la correccion a segundo orden de los niveles de energia es:

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{|\langle n-1|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} + \frac{|\langle n+1|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} = \\ &= \frac{\lambda^2 \hbar^2 \omega^2}{2} \left[\frac{n}{\hbar \omega} - \frac{n+1}{\hbar \omega} \right]. \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos:

$$E_n^{(2)} = -\frac{\lambda^2 \hbar \omega}{2}.$$

Asi pues, hasta segundo orden en λ , los niveles de energia son $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(2)}$, es decir:

$$\boxed{E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1 - \lambda^2}{2} \right)} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Estudiemos ahora los estados perturbados. A primer orden en λ son:

$$|n(\lambda)\rangle \approx |n\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle k|V|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle = |n\rangle + \frac{\langle n-1|V|n\rangle}{\hbar \omega} |n-1\rangle - \frac{\langle n+1|V|n\rangle}{\hbar \omega} |n+1\rangle.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\langle n-1|V|n\rangle}{\hbar \omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{n}, \quad \frac{\langle n+1|V|n\rangle}{\hbar \omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{n+1},$$

obtenemos:

$$\boxed{|n(\lambda)\rangle \approx |n\rangle + \lambda \sqrt{\frac{n}{2}} |n-1\rangle - \lambda \sqrt{\frac{n+1}{2}} |n+1\rangle}$$

Al ser el hamiltoniano total cuadratico en coordenadas y momentos se podran calcular los autovalores y autovectores de forma exacta completando los cuadrados. En efecto, escribamos el hamiltoniano total como:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \lambda \hbar \omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

Completemos cuadrados en el potencial total, es decir escribamos:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \lambda \hbar \omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x = a(x + \Delta)^2 + B = a x^2 + 2a \Delta x + a \Delta^2 + B.$$

Comparando los coeficientes de las diferentes potencias de x obtenemos tres ecuaciones para los coeficientes a , Δ y B :

$$a = \frac{1}{2} m\omega^2, \quad 2a\Delta = \lambda \hbar\omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad a\Delta^2 + B = 0.$$

Entonces:

$$\Delta = \frac{1}{m\omega^2} \lambda \hbar\omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

$$B = -a\Delta^2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 \lambda^2 \frac{\hbar}{m\omega} = -\frac{\hbar\omega}{2} \lambda^2,$$

lo que significa que el hamiltoniano total puede escribirse como:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x + \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right)^2 - \frac{\hbar\omega}{2} \lambda^2$$

Es decir, el hamiltoniano total es el que corresponde a un oscilador con su posición de equilibrio desplazada y con una constante aditiva. Por lo tanto los valores exactos de los niveles de energía son:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar\omega}{2} \lambda^2$$

que coinciden exactamente con los valores obtenidos a segundo orden en la constante λ .

Obtengamos ahora los autoestados de H exactos. Además de tener que sumar una constante, que no cambia sus autoestados, el hamiltoniano exacto se obtiene del hamiltoniano con $\lambda = 0$ haciendo la traslación $x \rightarrow x + \Delta$. Ello quiere decir que las funciones de onda de los estados con energía bien definida para el hamiltoniano total serán:

$$\psi_n(x) = \langle x + \Delta | n \rangle.$$

Sea $T(\Delta)$ el operador unitario que realiza la traslación espacial $x \rightarrow x + \Delta$ en la base de coordenadas:

$$T(\Delta) |x\rangle = |x + \Delta\rangle.$$

Entonces, dado que $T^\dagger(\Delta) = T^{-1}(\Delta) = T(-\Delta)$, tenemos:

$$\langle x + \Delta | = \langle x | T^\dagger(\Delta) = \langle x | T(-\Delta),$$

y por lo tanto

$$\psi_n(x) = \langle x | T(-\Delta) | n \rangle,$$

que es equivalente a decir que los autoestados del sistema perturbado son:

$$|n(\lambda)\rangle = T(-\Delta)|n\rangle .$$

Ahora bien, sabemos que $T(\Delta) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}P\Delta\right]$. Teniendo en cuenta el valor de Δ obtenido mas arriba, se sigue que:

$$|n(\lambda)\rangle = \exp\left[i\frac{\lambda}{\sqrt{m\omega\hbar}}P\right]|n\rangle$$

Comparemos este resultado exacto con el obtenido a primer orden en la constante λ . Desarrollando la exponencial hasta primer orden en λ , obtenemos:

$$|n(\lambda)\rangle \approx \left[1 + i\frac{\lambda}{\sqrt{m\omega\hbar}}P\right]|n\rangle .$$

Escribamos el operador del segundo miembro de esta ecuacion en terminos de operadores de creacion y aniquilacion:

$$P = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^\dagger - a) \quad \Longrightarrow \quad i\frac{\lambda}{\sqrt{m\omega\hbar}}P = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a) .$$

Por consiguiente:

$$|n(\lambda)\rangle \approx \left[1 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger)\right]|n\rangle = |n\rangle + \lambda\sqrt{\frac{n}{2}}|n-1\rangle - \lambda\sqrt{\frac{n+1}{2}}|n+1\rangle ,$$

que coincide con el estado calculado en teoria de perturbaciones a primer orden en λ .

[4] Un rotor rígido cuántico constreñido a rotar en un plano tiene momento de inercia I y momento dipolar eléctrico $\vec{d} = \mu\vec{n}$, en el plano. Encuéntrese la primera corrección no nula a sus niveles de energía en presencia de un campo eléctrico uniforme y débil $\vec{E} = \epsilon\vec{x}$

Solucion

El Hamiltoniano de un rotor rígido que gira en un plano con momento angular L es

$$H_{(0)} = \frac{L^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} ,$$

donde I es el momento de inercia. La ecuación de Schrödinger estacionaria conduce a las autofunciones (normalizadas):

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = E\psi \quad \Longrightarrow \quad \psi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta} , \quad n \in \mathbb{Z} ,$$

y al siguiente espectro discreto

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 n^2}{2I} ,$$

doblemente degenerado salvo en el estado fundamental pues $\psi_n(\theta)$ y $\psi_{-n}(\theta)$ tienen la misma energía. El acoplamiento dipolar eléctrico es

$$H' = -\vec{d} \cdot \vec{E} = -\mu\varepsilon \cos \theta ,$$

la debilidad del campo se refleja en $\varepsilon \ll 1$. La corrección de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$ resultante de aplicar la teoría de perturbaciones es nula,

$$E_n^{(1)} = \langle n | H' | n \rangle = -\frac{\mu\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0 .$$

Debemos ir al menos hasta orden $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$,

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k | H' | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} .$$

Debemos calcular

$$\begin{aligned} \langle k | H' | n \rangle &= -\frac{\mu\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} \cos \theta \, d\theta = -\frac{\mu\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} [e^{i(n-k+1)\theta} + e^{i(n-k-1)\theta}] \, d\theta \\ &= -\frac{\mu\varepsilon}{2} [\delta_{k,n+1} + \delta_{k,n-1}] , \end{aligned}$$

resultado que, introducido en la ecuación anterior, lleva a

$$E_n^{(2)} = \frac{\mu^2 \varepsilon^2 2I}{4 \hbar^2} \left[\frac{1}{n^2 - (n-1)^2} + \frac{1}{n^2 - (n+1)^2} \right] = \frac{\mu^2 \varepsilon^2 I}{\hbar^2} \frac{1}{4n^2 - 1} .$$

La energía resultante a orden cuadrático es por consiguiente

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2I} + \frac{\mu^2 \varepsilon^2 I}{\hbar^2} \frac{1}{4n^2 - 1} ,$$

manteniéndose la doble degeneración, $E_{-n} = E_n$.

[5] Considerese una partícula moviéndose en el plano xy bajo la acción del potencial

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) + \beta m \omega^2 xy ,$$

donde ω es la frecuencia del sistema y β es una constante pequeña.

(a) Calcúlese al primer orden no nulo en β la energía del estado fundamental.

(b) Lo mismo para el primer estado excitado.

Solucion

El sistema es un oscilador armonico bidimensional perturbado por el segundo termino, siendo β la constante que determina la magnitud de la perturbacion. Introduzcamos operadores de creacion y aniquilacion para las coordenadas x e y :

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger), \quad y = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_y + a_y^\dagger).$$

El hamiltoniano no perturbado sera:

$$H_0 = \hbar\omega\left(a_x^\dagger a_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(a_y^\dagger a_y + \frac{1}{2}\right),$$

donde los operadores a_x y a_x^\dagger conmutan con a_y y a_y^\dagger , tal como corresponde a dos osciladores armonicos desacoplados. Los autovalores de H_0 dependen de dos numeros no negativos n_x y n_y :

$$H_0 |n_x, n_y\rangle = \hbar\omega (n_x + n_y + 1) |n_x, n_y\rangle, \quad n_x, n_y = 0, 1, \dots$$

Asi pues, los niveles de energia del sistema no perturbado son:

$$E_{n_x, n_y}^{(0)} = \hbar\omega (n_x + n_y + 1).$$

Denotemos por V_I a la perturbacion, es decir:

$$V_I = \beta m \omega^2 x y.$$

En terminos de los operadores de creacion y aniquilacion:

$$V_I = \beta m \omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} (a_x + a_x^\dagger) (a_y + a_y^\dagger),$$

y simplificando obtenemos:

$$V_I = \beta \frac{\hbar\omega}{2} (a_x + a_x^\dagger) (a_y + a_y^\dagger)$$

(a) El estado fundamental no perturbado es $|0, 0\rangle$, cuya energia es $E_{0,0}^{(0)} = \hbar\omega$. Para obtener como cambia debido a la perturbacion estudiemos como actua V_I sobre el:

$$V_I |0, 0\rangle = \beta \frac{\hbar\omega}{2} a_x^\dagger a_y^\dagger |0, 0\rangle = \beta \frac{\hbar\omega}{2} |1, 1\rangle.$$

Entonces:

$$\langle 0, 0 | V_I | 0, 0 \rangle = 0, \quad \langle 1, 1 | V_I | 0, 0 \rangle = \beta \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Asi pues, la correccion de primer orden a la energia del estado $|0,0\rangle$ es nula y la energia a segundo orden es:

$$E_0(\beta) \approx \hbar\omega + \frac{|\langle 1,1|V_I|0,0\rangle|^2}{E_{0,0}^{(0)} - E_{1,1}^{(0)}} = \hbar\omega + \left(\beta \frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{-2\hbar\omega}\right).$$

Simplificando, obtenemos:

$$E_0(\beta) \approx \hbar\omega \left(1 - \frac{\beta^2}{8}\right)$$

(b) El primer nivel de energia excitado no perturbado es degenerado y esta formado por los estados $|1,0\rangle$ y $|0,1\rangle$. Sobre estos estados la perturbacion V_I actua como:

$$\begin{aligned} V_I |1,0\rangle &= \beta \frac{\hbar\omega}{2} (a_x + a_x^\dagger) (a_y + a_y^\dagger) |1,0\rangle = \beta \frac{\hbar\omega}{2} (a_x + a_x^\dagger) |1,1\rangle = \\ &= \beta \frac{\hbar\omega}{2} [|0,1\rangle + \sqrt{2} |2,1\rangle], \\ V_I |0,1\rangle &= \beta \frac{\hbar\omega}{2} (a_x + a_x^\dagger) (a_y + a_y^\dagger) |0,1\rangle = \beta \frac{\hbar\omega}{2} (a_x + a_x^\dagger) [|0,0\rangle + \sqrt{2} |0,2\rangle] = \\ &= \beta \frac{\hbar\omega}{2} [|1,0\rangle + \sqrt{2} |1,2\rangle]. \end{aligned}$$

Los elementos de matriz de V_I entre $|1,0\rangle$ y $|0,1\rangle$ son:

$$\begin{aligned} \langle 1,0|V_I|1,0\rangle &= \langle 0,1|V_I|0,1\rangle = 0, \\ \langle 0,1|V_I|1,0\rangle &= \langle 1,0|V_I|0,1\rangle = \beta \frac{\hbar\omega}{2}, \end{aligned}$$

de forma que la representacion matricial de V_I en este subespacio es:

$$[V_I] = \begin{pmatrix} 0 & \beta \frac{\hbar\omega}{2} \\ \beta \frac{\hbar\omega}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz son las raices de la ecuacion:

$$\lambda^2 - \left(\beta \frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 = 0, \quad \lambda = \pm \beta \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Asi pues, a primer orden en β las energias de los primeros niveles excitados son:

$$E_{\pm}(\beta) = E_{1,0}^{(0)} \pm \beta \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Puesto que $E_{1,0}^{(0)} = 2\hbar\omega$, tenemos finalmente:

$$E_{\pm}(\beta) = 2\hbar\omega\left(1 \pm \frac{\beta}{4}\right)$$

Observemos que la perturbacion rompe la degeneracion que esta presente cuando $\beta = 0$.

[6] Considerese una partícula de masa m , moviéndose bajo la influencia de un potencial armónico unidimensional

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2.$$

Una perturbación dada por

$$H_I = 2\alpha x \cos(\omega t),$$

donde α es una constante real que se asume pequeña, se enciende en el tiempo $t = 0$. Suponiendo que en $t = 0$, el sistema estaba en el estado fundamental $|0\rangle$, del hamiltoniano sin perturbar, calcúlese la probabilidad de transición $p_n(t)$ al estado $|n\rangle$ al nivel más bajo de teoría de perturbaciones.

Solucion

La probabilidad de transición entre el estado $|0\rangle$ a $t = 0$ y el estado $|n\rangle$ en el instante $t \geq 0$ es:

$$P_{|0\rangle \rightarrow |n\rangle}(t) = |\langle n, t|0\rangle|^2 = |c_n(t)|^2,$$

siendo

$$c_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{in\omega_0 t'} \langle n|H_I(t')|0\rangle,$$

pues, como en el problema [1], $\omega_{n0} = \frac{E_n - E_0}{\hbar} = n\omega_0$. Además:

$$\langle n|H_I(t')|0\rangle = 2\alpha \cos\omega t' \langle n|X|0\rangle,$$

que, en terminos de los operadores a y a^\dagger es

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \implies \langle n|X|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n|a^\dagger|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{n,1}.$$

Se sigue por tanto que esta perturbacion solo induce la transición $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Necesitamos calcular $c_1(t)$, que es igual a:

$$c_1(t) = -\frac{i}{\hbar} 2\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^t dt' e^{i\omega_0 t'} \cos\omega t'.$$

Calculemos la integral

$$\begin{aligned}
 \int_0^t dt' e^{i\omega_0 t'} \cos \omega t' &= \frac{1}{2} \int_0^t dt' e^{i\omega_0 t'} \left[e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(\omega_0+\omega)t'}}{i(\omega_0+\omega)} \Big|_{t'=0}^{t'=t} + \frac{1}{2} \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t'}}{i(\omega_0-\omega)} \Big|_{t'=0}^{t'=t} = \\
 &= \frac{1}{2i(\omega_0+\omega)} \left[e^{i(\omega_0+\omega)t} - 1 \right] + \frac{1}{2i(\omega_0-\omega)} \left[e^{i(\omega_0-\omega)t} - 1 \right] = \\
 &= \frac{e^{i\frac{\omega_0+\omega}{2}t}}{\omega_0+\omega} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0+\omega}{2} t \right) + \frac{e^{i\frac{\omega_0-\omega}{2}t}}{\omega_0-\omega} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0-\omega}{2} t \right) .
 \end{aligned}$$

Entonces

$$c_1(t) = -i\alpha \sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}} \left[\frac{e^{i\frac{\omega_0+\omega}{2}t}}{\omega_0+\omega} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0+\omega}{2} t \right) + \frac{e^{i\frac{\omega_0-\omega}{2}t}}{\omega_0-\omega} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0-\omega}{2} t \right) \right]$$

y la probabilidad pedida es $P_{|0\rangle \rightarrow |1\rangle}(t) = |c_1(t)|^2$. Si $\omega_0 \approx \omega$ el segundo termino es el dominante. En este caso:

$$P_{|0\rangle \rightarrow |1\rangle}(t) = \frac{2\alpha^2}{m\hbar\omega} \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\omega_0-\omega}{2} t \right)}{(\omega_0-\omega)^2}$$

[7] Considérese una partícula de masa m en un pozo infinito de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < a \\ \infty & \text{si } x < 0 \text{ o } x > a \end{cases}$$

La partícula está a tiempos $t \rightarrow -\infty$ en el estado fundamental. Se somete a una perturbacion pequeña

$$H_I = \frac{\lambda\hbar}{\tau a} x e^{-(t/\tau)^2},$$

donde $\lambda \ll 1$ y donde τ es una constante positiva con unidades de tiempo. Calcúlese la probabilidad de encontrar a la partícula en el primer nivel excitado para $t \rightarrow \infty$.

Solucion

Las autofunciones del hamiltoniano no perturbado y sus correspondientes autovalores son:

$$\psi_n^0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \quad E_n^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

La probabilidad de transición $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ inducida por H_I es:

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{21}t} \langle 2|H_I(t)|1\rangle \right|^2.$$

Calculemos el elemento de matriz de H_I :

$$\begin{aligned} \langle 2|H_I(t)|1\rangle &= \frac{\lambda\hbar}{\tau a} e^{-(t/\tau)^2} \langle 2|X|1\rangle = \frac{\lambda\hbar}{\tau a} e^{-(t/\tau)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\psi_2^0(x) \right]^* x \psi_1^0(x) = \\ &= \frac{\lambda\hbar}{\tau a} e^{-(t/\tau)^2} \frac{2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} = -\frac{8a^2}{9\pi^2},$$

obtenemos:

$$\langle 2|H_I(t)|1\rangle = \frac{2\lambda\hbar}{\tau a^2} \left(-\frac{8a^2}{9\pi^2} \right) e^{-(t/\tau)^2} = -\frac{16\lambda\hbar}{9\pi^2 \tau} e^{-(t/\tau)^2}.$$

La probabilidad buscada ser pues:

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{\hbar^2} \left[-\frac{16\lambda\hbar}{9\pi^2 \tau} \right]^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{21}t} e^{-(t/\tau)^2} \right]^2.$$

A partir de la fórmula general de las integrales gaussianas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt = \exp[-at^2 + bt] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}},$$

con $a = \tau^{-2}$ y $b = i\omega_{21}$, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{21}t} e^{-(t/\tau)^2} = \sqrt{\pi} \tau e^{-\frac{\omega_{21}^2 \tau^2}{4}}.$$

Por lo tanto:

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{(16)^2 \lambda^2}{9^2 \pi^4 \tau^2} \pi \tau^2 e^{-\frac{\omega_{21}^2 \tau^2}{2}} = \frac{256 \lambda^2}{81 \pi^3} e^{-\frac{\omega_{21}^2 \tau^2}{2}}.$$

Teniendo en cuenta que:

$$\omega_{21} = \frac{E_2^0 - E_1^0}{\hbar} = \frac{3\pi^2 \hbar}{2m a^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\omega_{21}^2}{2} = \frac{9\pi^4 \hbar^2}{8 m^2 a^4} ,$$

obtenemos finalmente

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{256 \lambda^2}{81 \pi^3} e^{-\frac{9\pi^4 \hbar^2 \tau^2}{8 m^2 a^4}}$$

[8] (Modelo de Jaynes-Cummings) Considérese un sistema compuesto por un oscilador armónico con frecuencia angular ω_r y un sistema de dos niveles. El hamiltoniano del sistema está dado por

$$H = H_r + H_a + V,$$

donde H_r es el hamiltoniano del oscilador armónico

$$H_r = \hbar\omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right),$$

H_a es el hamiltoniano del sistema de dos niveles

$$H_a = \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z,$$

donde σ_z es la matriz de Pauli y $\omega_a > 0$. El término V es un acoplo entre los dos sistemas, dado por

$$V = \hbar g (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+),$$

donde σ_\pm están dadas por

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2} (\sigma_x \pm i\sigma_y).$$

(a) Calcúlese, al nivel no nulo más bajo, las energías propias del sistema en el caso $\omega_r \neq \omega_a$.

(b) Lo mismo para el caso $\omega_r = \omega_a$.

Solucion

(a) Queremos estudiar este problema en teoría de perturbaciones en la constante de acoplo g . Para ello analicemos en primer lugar el sistema desacoplado con $g = V = 0$. Los autoestados del hamiltoniano en este caso son productos tensoriales de los del oscilador y la matriz σ_z . Denotemoslos por $|n, \sigma\rangle$, donde $n = 0, 1 \dots y$

$\sigma = \pm 1$. Los $|n, \sigma\rangle$ satisfacen:

$$(H_r + H_a) |n, \sigma\rangle = E_{n,\sigma}^{(0)} |n, \sigma\rangle ,$$

donde los niveles de energia $E_{n,\sigma}^0$ son:

$$E_{n,\sigma}^{(0)} = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma . \quad (0.1)$$

Supongamos ahora que $g \neq 0$. A segundo orden en teoria de perturbaciones los autovalores de la energia son:

$$E_{n,\sigma} = E_{n,\sigma}^{(0)} + \langle n, \sigma | V | n, \sigma \rangle + \sum_{n', \sigma' \neq n, \sigma} \frac{|\langle n', \sigma' | V | n, \sigma \rangle|^2}{E_{n,\sigma}^{(0)} - E_{n', \sigma'}^{(0)}} .$$

Para obtener como actua la perturbacion V sobre los estados observemos que las matrices σ_+ y σ_- son:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Escribamos como actuan estas matrices actuan sobre los vectores de la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, donde:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Se tiene:

$$\sigma_+ |+\rangle = 0 , \quad \sigma_+ |-\rangle = |+\rangle , \quad \sigma_- |+\rangle = |-\rangle , \quad \sigma_- |-\rangle = 0 .$$

Puesto que $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ y que $a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, se tiene:

$$V |n, +\rangle = \hbar g (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) |n, +\rangle = \hbar g \sqrt{n+1} |n+1, -\rangle ,$$

$$V |n, -\rangle = \hbar g (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) |n, -\rangle = \hbar g \sqrt{n} |n-1, -\rangle .$$

Se sigue entonces que los elementos de matriz diagonales son nulos:

$$\langle n, \sigma | V | n, \sigma \rangle = 0 .$$

Por lo tanto la correccion de primer orden en V de los niveles de energia es cero. Los unicos elementos de matriz de V no nulos son no diagonales y estan dados por:

$$\langle n+1, - | V | n, + \rangle = \hbar g \sqrt{n+1} , \quad \langle n-1, + | V | n, - \rangle = \hbar g \sqrt{n} .$$

Entonces:

$$E_{n,+} = E_{n,+}^{(0)} + \frac{|\langle n+1, - | V | n, + \rangle|^2}{E_{n,+}^{(0)} - E_{n+1,-}^{(0)}} ,$$

$$E_{n,-} = E_{n,-}^{(0)} + \frac{|\langle n-1, + | V | n, - \rangle|^2}{E_{n,-}^{(0)} - E_{n-1,+}^{(0)}} .$$

Pero:

$$E_{n,+}^{(0)} - E_{n+1,-}^{(0)} = \hbar(\omega_a - \omega_r) , \quad E_{n,-}^{(0)} - E_{n-1,+}^{(0)} = -\hbar(\omega_a - \omega_r) .$$

Si definimos la diferencia de frecuencias Δ como:

$$\Delta \equiv \omega_a - \omega_r ,$$

entonces:

$$E_{n,+} = E_{n,+}^{(0)} + \frac{\hbar g^2}{\Delta}(n+1) , \quad E_{n,-} = E_{n,-}^{(0)} - \frac{\hbar g^2}{\Delta}n .$$

Usando los valores de los niveles de energia no perturbados $E_{n,\pm}^{(0)}$ se puede probar facilmente que:

$$E_{n,+}^{(0)} + \frac{\hbar g^2}{\Delta}(n+1) = \hbar\left(\omega_r + \frac{g^2}{\Delta}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar}{2}\left(\omega_a + \frac{g^2}{\Delta}\right) ,$$

$$E_{n,-}^{(0)} - \frac{\hbar g^2}{\Delta}n = \hbar\left(\omega_r - \frac{g^2}{\Delta}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar}{2}\left(\omega_a - \frac{g^2}{\Delta}\right) .$$

Entonces, a order g^2 , los niveles de energia son:

$$E_{n,\sigma} = \hbar\left(\omega_r + \sigma \frac{g^2}{\Delta}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar}{2}\left(\omega_a \sigma + \frac{g^2}{\Delta}\right)$$

Esta expresion solo es valida si $\Delta = \omega_a - \omega_r \neq 0$.

(b) Estudiemos ahora el caso resonante con $\Delta = 0$ o, lo que es lo mismo, $\omega_a = \omega_r$. En este caso los niveles de energia del sistema sin perturbar son:

$$E_{n,\sigma}^{(0)} = \hbar\omega \left[n + \frac{1+\sigma}{2} \right] \quad (\omega \equiv \omega_r = \omega_a)$$

Por lo tanto:

$$E_{n,+}^{(0)} = E_{n+1,-}^{(0)} = \hbar\omega(n+1) .$$

Entonces los estados no perturbados $|n, +\rangle$ y $|n + 1, -\rangle$ están degenerados. Para estudiar la influencia de la interacción V tendremos que considerar la teoría de perturbaciones degenerada. En el subespacio $\{|n, +\rangle, |n + 1, -\rangle\}$ los elementos de matriz de V son:

$$\langle n, +|V|n, +\rangle = \langle n + 1, -|V|n + 1, -\rangle = 0 ,$$

$$\langle n + 1, -|V|n, +\rangle = \langle n, +|V|n + 1, -\rangle = \hbar g \sqrt{n + 1} .$$

Es decir la matriz correspondiente a V en este subespacio es:

$$[V] = \begin{pmatrix} 0 & \hbar g \sqrt{n + 1} \\ \hbar g \sqrt{n + 1} & 0 \end{pmatrix} .$$

La corrección al nivel de energía no perturbado $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + 1)$ vendrá dada por los autovalores λ de V , que son solución de la ecuación

$$0 = \det(V - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \hbar g \sqrt{n + 1} \\ \hbar g \sqrt{n + 1} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\hbar g \sqrt{n + 1})^2 ,$$

es decir

$$\lambda = \pm \hbar g \sqrt{n + 1} .$$

Entonces los niveles de energía son

$$\boxed{E_{n,\pm} = \hbar \left[\omega(n + 1) \pm g \sqrt{n + 1} \right]} \quad n = 0, 1, \dots , \quad \omega = \omega_r = \omega_a .$$

[9] En el modelo de Jaynes-Cummings del problema anterior, considere la transformación unitaria

$$H' = U^\dagger H U ,$$

donde

$$U = e^{\frac{g}{\Delta} S} ,$$

con $\Delta = \omega_a - \omega_r \neq 0$ y $S = a^\dagger \sigma_- - a \sigma_+$.

(a) Calcúlese H' a segundo orden en g/Δ .

(b) Encuéntrese los autovalores y autovectores exactos de H .

Solucion

(a) Veamos como el hamiltoniano de este sistema se puede diagonalizar por medio de una transformacion unitaria. Observemos primero que S es un operador antihermitico:

$$S^\dagger = a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_- = -S .$$

Entonces $U^\dagger = e^{-\frac{g}{\Delta}S} = U^{-1}$, lo que demuestra que U es efectivamente unitario. Utilizando la formula de Baker-Campbell-Hausdorff calculemos H' hasta segundo orden en g :

$$H' = e^{-\frac{g}{\Delta}S} H e^{\frac{g}{\Delta}S} = H + [L, H] + \frac{1}{2} [L, [L, H]] ,$$

donde hemos definido $L = -\frac{g}{\Delta}S$. Obtengamos los diferentes conmutadores en esta ultima expresion usando

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z , \quad [\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm ,$$

ademas de $[a, a^\dagger] = 1$. El primer conmutador que necesitamos es:

$$[L, H] = -\frac{g}{\Delta} [S, H] = -\frac{g}{\Delta} \left[[S, H_r] + [S, H_a] + [S, V] \right] .$$

Obtengamos los diferentes terminos del segundo miembro de esta expresion. El primero de ellos es:

$$\begin{aligned} [S, H_r] &= \left[a^\dagger\sigma_- - a\sigma_+, \hbar\omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \right] = \hbar\omega_r \left(\sigma_- [a^\dagger, a^\dagger a] - \sigma_+ [a, a^\dagger a] \right) = \\ &= \hbar\omega_r \left(\sigma_- a^\dagger [a^\dagger, a] - \sigma_+ [a, a^\dagger] a \right) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\boxed{[S, H_r] = -\hbar\omega_r \left(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a \right) = -\frac{\omega_r}{g} V}$$

Ademas:

$$[S, H_a] = \left[a^\dagger\sigma_- - a\sigma_+, \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z \right] = \frac{\hbar\omega_a}{2} \left(a^\dagger [\sigma_-, \sigma_z] - a [\sigma_+, \sigma_z] \right) ,$$

que despues de utilizar el conmutador de σ_\pm con σ_z se convierte en:

$$\boxed{[S, H_a] = \hbar\omega_a \left(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+ \right) = \frac{\omega_a}{g} V}$$

Por ultimo calculemos el conmutador de S y V :

$$\begin{aligned} [S, V] &= \hbar g [a^\dagger\sigma_- - a\sigma_+, a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+] = \hbar g \left([a^\dagger\sigma_-, a\sigma_+] - [a\sigma_+, a^\dagger\sigma_-] \right) = \\ &= 2\hbar g [a^\dagger\sigma_-, a\sigma_+] = 2\hbar g \left(a^\dagger a \sigma_- \sigma_+ - a a^\dagger \sigma_+ \sigma_- \right) . \end{aligned}$$

Usando en el ultimo termino de esta ecuacion que $a a^\dagger = [a, a^\dagger] + a^\dagger a = 1 + a^\dagger a$, obtenemos:

$$[S, V] = 2 \hbar g \left[a^\dagger a (\sigma_- \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_-) - \sigma_+ \sigma_- \right].$$

Pero $[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z$ y $\sigma_+ \sigma_- = (1 + \sigma_z)/2$ y por consiguiente podemos escribir:

$$\boxed{[S, V] = -2 \hbar g \left[\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right]}$$

Entonces, el conmutador $[L, H]$ que buscamos es:

$$[L, H] = -\frac{g}{\Delta} \left[\frac{\omega_a - \omega_r}{g} V - 2 \hbar g \left(\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right) \right].$$

Teniendo en cuenta que $\Delta = \omega_a - \omega_r$ podemos escribir esta ultima expresion en la forma:

$$\boxed{[L, H] = -V + \frac{2 \hbar g^2}{\Delta} \left(\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right)}$$

Obtengamos ahora el siguiente termino en la expansion de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$\frac{1}{2} [L, [L, H]] = -\frac{g}{2\Delta} [S, [L, H]] = -\frac{g}{2\Delta} \left[S, -V + \frac{2 \hbar g^2}{\Delta} \left(\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right) \right].$$

El segundo termino en el conmutador da una contribucion de orden g^3 . Puesto que estamos calculando el hamiltoniano transformado hasta orden g^2 , la despreciaremos y escribiremos simplemente:

$$\frac{1}{2} [L, [L, H]] = \frac{g}{2\Delta} [S, V] = \frac{g}{2\Delta} (-2 \hbar g) \left[\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right],$$

que una vez simplificado da:

$$\boxed{\frac{1}{2} [L, [L, H]] = -\frac{\hbar g^2}{\Delta} \left[\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right]}$$

Teniendo en cuenta todas las contribuciones que hemos ido obteniendo, podemos escribir H' como:

$$H' = H - V + \frac{2 \hbar g^2}{\Delta} \left(\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right) - \frac{\hbar g^2}{\Delta} \left[\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right].$$

Teniendo en cuenta que $H - V = H_r + H_a$, el hamiltoniano transformado se puede poner en la forma:

$$\boxed{H' = \hbar \omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_z + \frac{\hbar g^2}{\Delta} \left[\frac{1 + \sigma_z}{2} + a^\dagger a \sigma_z \right]}$$

Observemos que H' es diagonal en la base de los estados $|n, \sigma\rangle$. Observemos tambien que H' se puede poner en la forma:

$$H' = \hbar\left(\omega_r + \frac{g^2}{\Delta} \sigma_z\right) a^\dagger a + \frac{\hbar}{2} \left(\omega_a + \frac{g^2}{\Delta}\right) \sigma_z + \frac{\hbar}{2} \left(\omega_r + \frac{g^2}{\Delta}\right)$$

A partir de esta ultima expresion es inmediato concluir que los estados $|n, \sigma\rangle$ son autoestados con energia:

$$E_{n,\sigma} = \hbar\left(\omega_r + \frac{g^2}{\Delta} \sigma\right) n + \frac{\hbar}{2} \left(\omega_a + \frac{g^2}{\Delta}\right) \sigma + \frac{\hbar}{2} \left(\omega_r + \frac{g^2}{\Delta}\right)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ y $\sigma = \pm 1$. Puede comprobarse facilmente que estos niveles de energia coinciden con los obtenidos en el apartado (a) del problema anterior.

(b) Vamos a resolver exactamente el problema de autovalores del hamiltoniano completo. Para ello obtengamos como actua H sobre los estados $|n, +\rangle$ y $|n+1, -\rangle$:

$$H |n, +\rangle = \left[\hbar\omega_r \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_a}{2} \right] |n, +\rangle + \hbar g \sqrt{n+1} |n+1, -\rangle .$$

Teniendo en cuenta que $\omega_a = \Delta + \omega_r$, podemos escribir esta ultima expresion en la forma:

$$H |n, +\rangle = \left[\hbar\omega_r (n+1) + \frac{\hbar\Delta}{2} \right] |n, +\rangle + \hbar g \sqrt{n+1} |n+1, -\rangle$$

De la misma forma

$$H |n+1, -\rangle = \left[\hbar\omega_r \left(n + \frac{3}{2}\right) - \frac{\hbar\omega_a}{2} \right] |n+1, -\rangle + \hbar g \sqrt{n+1} |n, +\rangle ,$$

que puede ponerse como:

$$H |n+1, -\rangle = \left[\hbar\omega_r (n+1) - \frac{\hbar\Delta}{2} \right] |n+1, -\rangle + \hbar g \sqrt{n+1} |n, +\rangle$$

Es decir que el resultado de actuar con H en el subespacio $\{|n, +\rangle, |n+1, -\rangle\}$ se mantiene en ese subespacio:

$$H \begin{pmatrix} |n, +\rangle \\ |n+1, -\rangle \end{pmatrix} = \mathcal{H}_n \begin{pmatrix} |n, +\rangle \\ |n+1, -\rangle \end{pmatrix} ,$$

siendo \mathcal{H}_n la siguiente matriz 2×2 :

$$\mathcal{H}_n = \hbar \begin{pmatrix} \omega_r (n+1) + \frac{\Delta}{2} & g \sqrt{n+1} \\ g \sqrt{n+1} & \omega_r (n+1) - \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} .$$

Observemos que el estado $|0, -\rangle$ no esta incluido en estos pares de estados $\{|n, +\rangle, |n+1, -\rangle\}$ para ningun n . Se puede comprobar que es un autoestado del hamiltoniano total. Ello es debido a que $V|0, -\rangle = 0$. En efecto:

$$V|0, -\rangle = \hbar g [a^\dagger \sigma_- |0, -\rangle + a \sigma_+ |0, -\rangle] = 0 .$$

Entonces:

$$H|0, -\rangle = \left(\frac{\hbar \omega_r}{2} - \frac{\hbar \omega_a}{2} \right) |0, -\rangle .$$

Es decir:

$$\boxed{H|0, -\rangle = -\frac{\hbar \Delta}{2} |0, -\rangle}$$

De hecho $|0, -\rangle$ es el **estado fundamental** del sistema. Para obtener el resto de los autovalores escribamos \mathcal{H}_n en la forma:

$$\mathcal{H}_n = \hbar(n+1)\omega_r \mathbb{I} + \hbar g \sqrt{n+1} \sigma_x + \frac{\hbar \Delta}{2} \sigma_z ,$$

donde \mathbb{I} es la matriz unidad 2×2 . Reescribamos de manera conveniente los terminos de \mathcal{H}_n que contienen las matrices de Pauli σ_x y σ_z . Sea \vec{N} el siguiente vector unitario en el plano xz :

$$\vec{N} = (\sin \theta, 0, \cos \theta) , \quad \vec{N} \cdot \vec{N} = 1 .$$

Escribamos:

$$\hbar g \sqrt{n+1} \sigma_x + \frac{\hbar \Delta}{2} \sigma_z = \frac{\hbar \omega_n}{2} \vec{N} \cdot \vec{\sigma} ,$$

donde hemos introducido ω_n . Para determinar el angulo θ y ω_n observemos que, igualando los coeficientes de σ_x y σ_z tenemos:

$$\frac{\hbar \omega_n}{2} \sin \theta = \hbar g \sqrt{n+1} , \quad \frac{\hbar \omega_n}{2} \cos \theta = \frac{\hbar \Delta}{2} .$$

Dividiendo estas dos ultimas ecuaciones obtenemos:

$$\tan \theta = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\Delta} ,$$

mientras que sumando sus cuadrados llegamos a:

$$\left(\frac{\hbar \omega_n}{2} \right)^2 = \hbar^2 g^2 (n+1) + \hbar^2 \frac{\Delta^2}{4} .$$

Entonces:

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}}$$

Los autovalores de $\vec{N} \cdot \vec{\sigma}$ son ± 1 (pues $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$). Así pues, los autovalores de $\hbar g \sqrt{n+1} \sigma_x + \frac{\hbar \Delta}{2} \sigma_z$ son $\pm \frac{\hbar \omega_n}{2}$, es decir:

$$\pm \hbar \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + g^2 (n+1)} .$$

Los autovectores de $\vec{N} \cdot \vec{\sigma}$ se pueden obtener de las formulas generales validas para cualquier \vec{N} . Si ponemos:

$$\vec{N} \cdot \vec{\sigma} |n_{\pm}\rangle = \pm |n_{\pm}\rangle ,$$

entonces:

$$|n_{+}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |n, +\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |n+1, -\rangle , \quad |n_{-}\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |n, +\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |n+1, -\rangle .$$

Claramente los vectores $|n_{\pm}\rangle$ diagonalizan la energia:

$$\mathcal{H}_n |n_{\pm}\rangle = \hbar \left((n+1)\omega_r \pm \frac{\omega_n}{2} \right) |n_{\pm}\rangle \equiv E_{n_{\pm}} |n_{\pm}\rangle ,$$

siendo $E_{n_{\pm}}$ los niveles de energia buscados:

$$E_{n_{\pm}} = \hbar \left[\omega_r (n+1) \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + g^2 (n+1)} \right] \quad (n = 0, 1, \dots) .$$

Como comprobacion se puede verificar que, a segundo order en g ,

$$E_{n_{+}} = E_{n,+} + \mathcal{O}(g^3) , \quad E_{n_{-}} = E_{n+1,-} + \mathcal{O}(g^3) ,$$

siendo $E_{n,+}$ ($E_{n+1,-}$) la energia del estado $|n, +\rangle$ ($|n+1, -\rangle$) calculada en el apartado anterior.

[10] Un oscilador armonico unidimensional perturbado tiene el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 + \lambda \cosh X ,$$

siendo λ una constante pequeña. Calculese a primer order en λ la energia del estado fundamental del oscilador.

Solucion

Sea $V = \lambda \cosh X$. La energia del estado fundamental a primer order es:

$$E_0 = \frac{\hbar \omega}{2} + \langle 0|V|0\rangle .$$

Tenemos pues que calcular el siguiente valor esperado en el estado fundamental no perturbado del oscilador:

$$\langle 0|V|0\rangle = \lambda \langle 0|\cosh X|0\rangle = \frac{\lambda}{2} \left[\langle 0|e^X|0\rangle + \langle 0|e^{-X}|0\rangle \right] .$$

Vamos a calcular en general el valor esperado $\langle 0|e^{\alpha X}|0\rangle$, siendo α una constante arbitraria. Efectuaremos este calculo por dos metodos distintos.

Metodo 1

Expresemos X en terminos de los operadores a y a^\dagger :

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) .$$

Para calcular el valor esperado de $e^{\alpha X}$ en el estado fundamental apliquemos la identidad de Glauber:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \quad \Longrightarrow \quad e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B ,$$

con:

$$A = \alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} a^\dagger , \quad B = \alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} a .$$

Puesto que entonces:

$$-\frac{1}{2}[A,B] = -\frac{\alpha^2}{2} \frac{\hbar}{2m\omega} [a^\dagger, a] = \frac{\hbar \alpha^2}{4m\omega} ,$$

entonces, se tiene:

$$e^{\alpha X} = e^{\frac{\hbar \alpha^2}{4m\omega}} e^{\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} a^\dagger} e^{\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} a} .$$

Teniendo en cuenta que:

$$a|0\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} a}|0\rangle = |0\rangle ,$$

$$\langle 0|a^\dagger = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle 0|e^{\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} a^\dagger} = \langle 0| .$$

Por lo tanto:

$$\langle 0|e^{\alpha X}|0\rangle = e^{\frac{\hbar \alpha^2}{4m\omega}}$$

Metodo 2

Trabajemos en la representacion de posicion:

$$\langle x|0\rangle = \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

En esta representacion, tenemos:

$$\langle 0|e^{\alpha X}|0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi_0(x)|^2 e^{\alpha x} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} I,$$

donde I es la siguiente integral gaussiana:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2 + \alpha x}.$$

Para calcular I completemos cuadrados en el exponente del integrando:

$$\begin{aligned} -\frac{m\omega}{\hbar}x^2 + \alpha x &= -\frac{m\omega}{\hbar}\left(x^2 - \frac{\alpha\hbar}{m\omega}x\right) = -\frac{m\omega}{\hbar}\left(x - \frac{\alpha\hbar}{2m\omega}\right)^2 + \frac{\alpha^2\hbar^2}{4m^2\omega^2}\frac{m\omega}{\hbar} = \\ &= -\frac{m\omega}{\hbar}\left(x - \frac{\alpha\hbar}{2m\omega}\right)^2 + \frac{\alpha^2\hbar}{4m\omega}. \end{aligned}$$

Entonces, la integral gaussiana I se puede calcular facilmente, con el siguiente resultado:

$$I = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha^2\hbar}{4m\omega}}.$$

Por tanto:

$$\langle 0|e^{\alpha X}|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha^2\hbar}{4m\omega}} = e^{\frac{\alpha^2\hbar}{4m\omega}},$$

que es el mismo valor que el obtenido por el primer metodo. Tomando $\alpha = \pm 1$ en este valor esperdo, obtenemos:

$$\langle 0|e^X|0\rangle = \langle 0|e^{-X}|0\rangle = e^{\frac{\hbar}{4m\omega}}.$$

Asi pues:

$$\langle 0|V|0\rangle = \frac{\lambda}{2} 2 e^{\frac{\hbar}{4m\omega}} = \lambda e^{\frac{\hbar}{4m\omega}},$$

y la energia del estado fundamental del oscilador a primer orden en λ es:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \lambda e^{\frac{\hbar}{4m\omega}}$$

[11] Sean a y a^\dagger los operadores de aniquilacion y creacion de un oscilador armonico unidimensional. Supongase que el hamiltoniano de un sistema es $H = H_0 + V$, siendo:

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a, \quad V = \lambda (a a^\dagger a + a^\dagger a a^\dagger),$$

donde ω y λ son dos constantes reales. Aplicando teoria de perturbaciones en la constante λ , encuentrense los autovalores y autofunciones de H a primer orden no nulo en λ .

Solucion

Sea $|n\rangle$ el estado tal que $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$. Entonces:

$$a a^\dagger a|n\rangle = \sqrt{n} a a^\dagger |n-1\rangle = n a|n-1\rangle = n^{\frac{3}{2}} |n-1\rangle,$$

$$a^\dagger a a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} a^\dagger a|n+1\rangle = (n+1) a^\dagger |n\rangle = (n+1)^{\frac{3}{2}} |n+1\rangle.$$

y el potencial V actua sobre un estado $|n\rangle$ en la forma:

$$V|n\rangle = \lambda n^{\frac{3}{2}} |n-1\rangle + \lambda (n+1)^{\frac{3}{2}} |n+1\rangle.$$

Por consiguiente, los elementos de matriz de V son:

$$\langle m|V|n\rangle = \lambda n^{\frac{3}{2}} \langle m|n-1\rangle + \lambda (n+1)^{\frac{3}{2}} \langle m|n+1\rangle = \lambda n^{\frac{3}{2}} \delta_{m,n-1} + \lambda (n+1)^{\frac{3}{2}} \delta_{m,n+1}.$$

Entonces, los elementos de matriz diagonales de V son nulos:

$$\langle n|V|n\rangle = 0,$$

lo cual implica que la correccion a primer orden en teoria de perturbaciones es nula:

$$E_n^{(1)} = 0.$$

Estudiemos la correccion a los niveles de energia a segundo orden. Para ello necesitamos saber cuales son los elementos de matriz no diagonales distintos de cero, que son:

$$\langle n-1|V|n\rangle = \lambda n^{\frac{3}{2}}, \quad \langle n+1|V|n\rangle = \lambda (n+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Entonces, si $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ son los niveles de energia a orden cero en λ , tenemos:

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{|\langle n-1|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} + \frac{|\langle n+1|V|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} = \\ &= \frac{\lambda^2}{\hbar\omega} [n^3 - (n+1)^3]. \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos:

$$E_n^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} (3n^2 + 3n + 1) .$$

Por lo tanto, los niveles de energia hasta orden λ^2 son:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{\hbar\omega} (3n^2 + 3n + 1) , \quad (n = 0, 1, 2, \dots) .$$

Los estados perturbados a primer orden en λ son:

$$|n(\lambda)\rangle \approx |n\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle k|V|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = |n\rangle + \frac{\langle n-1|V|n\rangle}{\hbar\omega} |n-1\rangle + \frac{\langle n+1|V|n\rangle}{-\hbar\omega} |n+1\rangle .$$

Substituyendo los valores de los elementos de matriz de V calculados mas arriba, obtenemos:

$$|n(\lambda)\rangle \approx |n\rangle + \frac{\lambda n^{\frac{3}{2}}}{\hbar\omega} |n-1\rangle - \frac{\lambda (n+1)^{\frac{3}{2}}}{\hbar\omega} |n+1\rangle .$$